מתמטיקה בדידה | סמסטר א׳ תשס״ו
א . אברון , ע . רגב , י . רודיטי | מועד א׳ 24.02.06

משך הבחינה שלוש שעות.

אסור השימוש בכל חומר עזר, או במחשבון (להוציא דפי נוסחאות המצורפות לשאלון).

רשום תשובותיך הסופיות **רק** על טופס הבחינה, **ורק** במקום המיועד לכך. המחברת מיועדת לטיוטא בלבד ותכנה **לא יבדק**. הקפד לציין על גבי **כל דף** את **מספר הסטודנט** שלך ואת **מספרה הסדורי** של המחברת (הדפים **יופרדו** לצורך הבדיקה).

- בבחינה **שש** שאלות. יש לענות על כל השאלות.
- **הקפידו לנמק כל תשובה בפרוט ובמדויק.**
- **ניקוד:** ניקוד מקסימלי לתשובה נכונה לשאלה הוא 20 (סעיפי בונוס עשויים להוסיף עד 3 נקודות נוספות). למניין הסופי של הנקודות תילקחנה תחילה בחשבון **ארבע** השאלות שלהן ניתן הניקוד המרבי. ניקודן של שתי השאלות הנותרות יחולק תחילה בשתיים והתוצאה תתווסף למניין שהתקבל מסיכום ארבע השאלות הקודמות.
- כמקובל, האותיות $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ מציינות, בהתאמה, את קבוצות המספרים הטבעיים, השלמים, הרציונליים והממשיים.

בהצלחה!

1. תהי A קבוצה. נגדיר את $T(A)$ באופן הבא:

$$T(A) = \{ B \subseteq A \mid |B| = |A \setminus B| \}$$

א. מצאו את עוצמת $T(A)$ במקרים הבאים: $A = \{1,2,\dots,100\}$, $A = \{1,2,\dots,101\}$

ב. מצאו את עוצמת $T(\mathbb{Z})$.

ג. תהי a עוצמה. נגדיר: $f(a) = |T(A)|$ כאשר A היא קבוצה המקיימת $|A| = a$. הוכיחו כי f מוגדרת היטב (כלומר, אינה תלויה בבחירת A).

ד. **בונוס**: מצאו את עוצמת $T(A)$ תחת ההנחה ש-A מקיימת $|A|+|A|=|A|$.

2. תהי A קבוצה של מספרים שלמים ויהי t מספר שלם. נגדיר:

$$A + t = \{ a + t \mid a \in A \}$$

נגדיר את היחס הבא:

$$R = \{ \langle A,B \rangle \in P(\mathbb{Z}) \times P(\mathbb{Z}) \mid \exists t \in \mathbb{Z} .\ B = A + t \}$$

א. הוכיחו כי R הוא יחס שקילות. על איזו קבוצה?

ב. מצאו את מחלקות השקילות הבאות ואת עוצמתן: $[\{0\}]_R$, $[\mathbb{Z}]_R$, $[\mathbb{Z}_{even}]_R$ (כאשר $\mathbb{Z}_{even}$ היא הקבוצה $\{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\}$)

ג. **בונוס:** מצאו את עוצמת קבוצת המנה של R.

3. תהי P קבוצה של "נקודות" ותהי L קבוצה של "ישרים" בעולם דמיוני. כל ישר ב-L הוא קבוצה של נקודות, כלומר תת קבוצה של P. הקבוצות P ו- L מקיימות את התכונות הבאות:

א. דרך כל שתי נקודות שונות של P עובר ישר יחיד ב-L.

ב. כל שני ישרים שונים של L נחתכים בנקודה אחת בלבד של P.

(דוגמא לקבוצות כאלה:
$P=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $L=\{\{1,2,3\},\{1,4,7\},\{3,6,7\},\{2,5,7\},\{3,4,5\},\{1,5,6\},\{2,4,6\}\}$)

יהיו $l_1, l_2 \in L$, $l_1 \neq l_2$ (שני ישרים שונים). תהי $A \in P$ כך ש $A \notin l_1, l_2$ (נקודה שאינה על שני הישרים).

נגדיר התאמה: $f = \lambda X \in l_1 .\ (\iota Y .\ Y \in AX \cap l_2)$

כאשר AX הוא הישר העובר דרך הנקודות A ו- X ו- ιY מסמן את "ה- Y היחיד כך ש-".

א. הוכיחו כי f היא פונקציה מוגדרת היטב.

ב. הוכיחו כי f היא פונקצית שקילות מ l_1 על l_2 ומצאו פונקציה הפוכה.

נמקו את כל שלבי ההוכחות!

4. נגדיר: $F = \lambda g \in (\mathbb{N} \to \mathbb{R}).\ \lambda n \in \mathbb{N}\ .\ g(n+2) - 6g(n+1) + 10g(n)$

א. מצאו תחום וטווח של F וחשבו את $(F(\lambda n \in \mathbb{N}\ .\ 2n-3))(7)$

ב. פתרו את המשוואה $F(X) = X$ (כלומר מצאו את כל האברים X בתחום שמקיימים את תנאי זה).

5. א. בכמה תמורות של הקבוצה $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ האיברים 1,2,3,4 **אינם** במקומם?

ב. מצאו נוסחה סגורה לסכום $\sum_{k=1}^{t} k2^k$. הוכיחו את תשובתכם במדויק.

6. א. יהי $G = (V,E)$ גרף פשוט. $|V| = n \geq 2$. נתון כי $\forall u \in V.\ d(u) \geq (n-1)/2$.

הוכיחו כי G קשיר.

ב. יהי $T = (V,E)$ עץ. $|V| \geq 2$. הוכיחו כי אם **כל** דרגות צמתי העץ הן אי-זוגיות אזי גם

$|E|$ הוא מספר אי-זוגי.