

Supposons que

$$r(x, y) = ax + by + c$$

satisfait les conditions de Floyd pour  $x \geq 1$  et  $y \geq 1$ . On a:

$$1^o) r(x, y) - r(x-y, y) \geq 1$$

$$ax + by + c - (a(x-y) + by + c) \geq 1$$

$$\cancel{ax + by + c} - \cancel{ax} + ay - \cancel{by} - \cancel{c} \geq 1$$

$$ay \geq 1$$

$$a \geq 1$$

$$2^o) b \geq 0$$

Par l'absurde supposons que  $b < 0$

$$\text{soit } y > \frac{ax+c}{-b} \text{ et } y \geq 1$$

$$-by > ax + c \quad \text{car } -b > 0$$

$$0 > ax + by + c$$

contraire à la condition  $r(x, y) \geq 0$ !

$$3^o) a + b + c \geq 0$$

prend  $r(x, y) \geq 0$  avec  $x = y = 1$

Réciproquement:

$$a) \quad a \geq 1 \wedge x \geq 1 \Rightarrow ax \geq a$$

$$b \geq 0 \wedge y \geq 1 \Rightarrow by \geq b$$

$$\Rightarrow ax + by + c \geq \cancel{ax + by + c} \geq a + b + c \geq 0$$

$$b) \quad r(x, y) - r(x-y, y) - 1$$

$$= ay$$

$$\geq 1 \quad \text{car } a \geq 1 \text{ et } y \geq 1$$


---

2)  $p \geq 0$

for all  $x, y$  integers,  $p < 0$

soit  $y > \frac{a+c}{-p}$  et  $y \geq 1$

$-py > ax+c$  car  $-p > 0$

$0 > ax+py+c$

car on a  $r(x, y) \geq 0$  !

3)  $(a+p+c) \geq 0$

avec  $r(x, y) \geq 0$  avec  $x=y=1$

Remarque :

10)  $r(x, y) \geq 0$

~~$ax+py+c \geq 0$~~