

# מבחן במתמטיקה בדידה

מועד ב' סמסטר ב' תשס"ה, 2005/9/9

מרצה: עודד רגב

מתרגלת: טלי קאופמן

משך המבחן: שלוש שעות

אסור השימוש בכל חומר עזר

הקפידו לנמק את כל תשובותיכם בפירוט

שתי התשובות הטובות תחשבנה כ-30 נקודות כל אחת

שאר שתי התשובות תחשבנה כ-20 נקודות כל אחת

1. (א) הוכח או הפרד: לכל קבוצות  $A, B, C$  מתקיים  $P(A \setminus B) \cap P(A \setminus C) = P(A \setminus (B \cup C))$ .  
(ב) הוכח או הפרד: לכל עוצמות  $a$  ו- $b$  גדולות מ-0 קיימת עוצמה  $c$  גדולה מ-0 כך ש- $a^c = b^c$ .  
(ג) מצא פונקציית שקילות מ- $\mathbb{N}^{\{3,9\}}$  ל- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\text{even}}$  (כאשר  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_{\text{even}} = \{0, 2, 4, \dots\}$ ).  
(ד) מצא את העוצמות  $a$  שעבורן מתקיים  $a^2 + 2^{2a} = 2^{2a}$ . הוכח את תשובתך.

2. נגדיר פונקציה

$$H = \lambda A \in P(\mathbb{Z}). \{x \in A \mid |\{y \in A \mid y \leq x\}| = |\{y \in A \mid y \geq x\}|\}$$

(א) מצא תחום וטווח ל- $H$ .

(ב) הוכח או הפרד:  $H$  היא פונקציית שקילות.

(ג) הוכח או הפרד: לכל  $A$  אינסופית,  $H(A)$  אינה ריקה.

(ד) מצא את העוצמות

$$|\{A \in P(\mathbb{N}) \mid |H(A)| > 1\}|$$

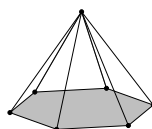
$$|\{A \in P(\mathbb{Z}) \mid H(A) = A\}|$$

3. (א) מצא את מספר הסדרות באורך  $n$  שמורכבות מהספרות 0, 1, 2 ושאינן מכילות שני מספרים זוגיים סמוכים.

(ב) נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים של סדרה  $a_1, \dots, a_n$  בתור הסדרה  $b_1, \dots, b_n$  המוגדרת על ידי  $b_k = \sum_{i=1}^k a_i$ . מצא את מספר הסדרות באורך  $n$  שמורכבות מהספרות 0, 1, 2 ושסדרת הסכומים החלקיים שלהן מכילה את כל המספרים בין 1 ל- $n$ .

(ג) מצא נוסחת נסיגה למספר הסדרות באורך  $n$  שמורכבות מ-1, 2, -1 ושסדרת הסכומים החלקיים שלהן מכילה את כל המספרים בין 1 ל- $n$ .

4. (א) מה מספר הפונקציות  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  שמקיימות שלכל  $k$  בתחום,  $f(k) \neq k$ ?  
(ב) מה מספר הפונקציות שמקיימות את הדרישה בסעיף הקודם ובנוסף ש- $f \circ f$  היא פונקציה הפיכה?  
(ג) בגרף הלא-מכוון הבא, מה מספר הטיולים באורך  $n$  שמבקרים בקדקד העליון לכל היותר פעם אחת? (להזכירך, טיול באורך  $n$  הוא סדרה  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  של קדקדים כך שלכל  $i = 1, \dots, n$  מתקיים ש- $\{v_{i-1}, v_i\}$  היא צלע בגרף; אין חשיבות לצבע האפור)



בהצלחה!!!