מבחן במתמטיקה בדידה

מועד א' סמסטר ב' תשס"ה, 2005/6/10
מרצה: עודד רגב
מתרגלת: טלי קאופמן
משך המבחן: שלוש שעות
אסור השימוש בכל חומר עזר
הקפידו לנמק את כל תשובותיכם בפירוט
שתי התשובות הטובות תחשבנה כ־30 נקודות כל אחת
שאר שתי התשובות תחשבנה כ־20 נקודות כל אחת

1. נגדיר פונקציה

$$H=\lambda f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}.\big(\lambda x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}.(f(y,x))^3\big)$$

(א) מצא תחום וטווח ל־H.

(ב) הוכח או הפרך: H היא פונקציית שקילות

(ג) מצא את העוצמות

$$|\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Q}\mid H(f)=f\}|$$
$$|\{f\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\mid H(f)=f\}|$$

2. (א) מצא פונקציית שקילות מ־$\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ ל־$\{3,4\}^{\mathbb{N}^+}$ (כאשר $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\},\mathbb{N}^+=\{1,2,3,\ldots\}$).

(ב) מצא את העוצמות a עבורן מתקיים $\aleph_0\cdot 2^a=2^a$. הוכח את תשובתך.

(ג) כמה מספרים זוגיים יש בין 0 ל־$1,000,000,000$ שמופיעות בהן כל הספרות מאחת עד תשע?

(ד) נסמן ב־a_n את מספר הסדרות באורך 100 שמורכבות מהספרות $0,1,2$ שסכומן הוא n. מצא פונקציה יוצרת לסדרה $a_0,a_1,a_2,\ldots$. מה המקדם של x^{197} בפונקציה שמצאת?

3. נגדיר

$$S=\big\{(A,B)\in P(\mathbb{Z})\times P(\mathbb{Z})\ \big|\ |A|=|A\cup B|\ \wedge\ |B|=|A\cup B|\big\}$$

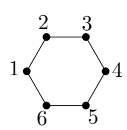
(א) הראה ש־S הוא יחס שקילות. על איזו קבוצה?

(ב) מצא את מחלקות השקילות $[\{1,4,9\}]_S,[\mathbb{N}]_S$ ואת עוצמתן.

(ג) מהי קבוצת המנה? מה עוצמתה?

(ד) האם היחס S עדיין היה יחס שקילות אם היינו מחליפים את ה־"$\cup$" ב־"$\cap$"? אם כן, תאר את קבוצת המנה; אם לא, נמק.

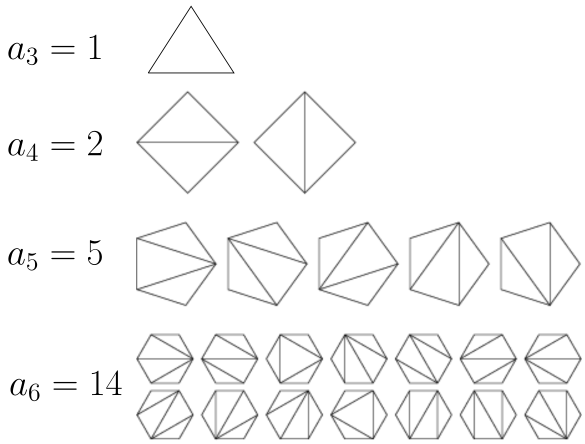
4. (א) בגרף הלא־מכוון הבא, מה מספר הטיולים באורך n שמתחילים בקדקד המסומן ב־1? (להזכירך, טיול באורך n הוא סדרה $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ של קדקדים כך שלכל $i=1,\ldots,n$ מתקיים ש־$\{v_{i-1},v_i\}$ היא צלע בגרף)



(ב) מה מספר הטיולים באורך n שמתחילים בקדקד 1 ומסתיימים בקדקד 1? (למשל, עבור $n=4$ יש שישה טיולים: (1,2,3,2,1),(1,2,1,2,1),(1,6,5,6,1),(1,6,1,6,1),(1,6,1,2,1),(1,2,1,6,1)). רמז: ניתן להיעזר בנוסחאות נסיגה.

(ג) עבור $n \geq 3$, נגדיר את a_n בתור מספר החלוקות של מצולע (קמור) בעל n צלעות ל־$n-2$ משולשים.
הוכח שמספר זה מקיים את נוסחת הנסיגה

$$a_3 = 1, \quad a_4 = 2, \quad \forall n \geq 5.\ a_n = 2a_{n-1} + \sum_{i=3}^{n-2} a_i a_{n+1-i}.$$



בהצלחה!!!