

La vérification des programmes par interprétation abstraite

Patrick Cousot

École normale supérieure

Patrick.Cousot@ens.fr www.di.ens.fr/~cousot

Équipe-projet INRIA Paris-Rocquencourt/CNRS/ENS « ABSTRACTION »

Séminaire

Chaire d'innovation technologique Liliane Bettencourt

Collège de France, 22 février 2008



1. Exemples classiques de bugs



Exemples classiques de bugs du calcul en entiers

Le programme factorielle (fact.c)

```
#include <stdio.h>
int fact (int n) {
    int r, i;
    r = 1;
    for (i=2; i<=n; i++) {
        r = r*i;
    }
    return r;
}
int main() { int n;
    scanf("%d",&n);
    printf("%d !=%d\n",n,fact(n));
}
```

$\leftarrow \text{fact}(n) = 2 \times 3 \times \dots \times n$

\leftarrow lire n (tapé au clavier)

\leftarrow écrire $n! = \text{fact}(n)$



Compilation⁽¹⁾ du programme factorielle (fact.c)

```
#include <stdio.h>                % gcc fact.c -o fact.exec
int fact (int n) {                %
    int r, i;
    r = 1;
    for (i=2; i<=n; i++) {
        r = r*i;
    }
    return r;
}

int main() { int n;
    scanf("%d",&n);
    printf("%d !=%d\n",n,fact(n)); }

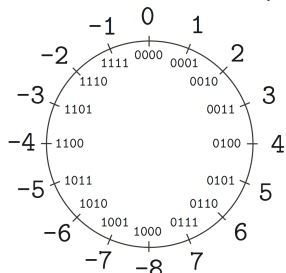
(1) Voir la leçon du 8 février 2008 et le sémi-
naire de Xavier Leroy
```

Exécutions du programme factorielle (fact.c)

```
#include <stdio.h>                % gcc fact.c -o fact.exec
int fact (int n) {                % ./fact.exec
    int r, i;                      3
    r = 1;                          3! = 6
    for (i=2; i<=n; i++) {          % ./fact.exec
        r = r*i;                    4
    }                                4! = 24
    return r;                       % ./fact.exec
}                                     100
int main() { int n;                100! = 0
    scanf("%d",&n);                 % ./fact.exec
    printf("%d !=%d\n",n,fact(n));  20
}                                     20! = -2102132736
```

À la chasse au bug

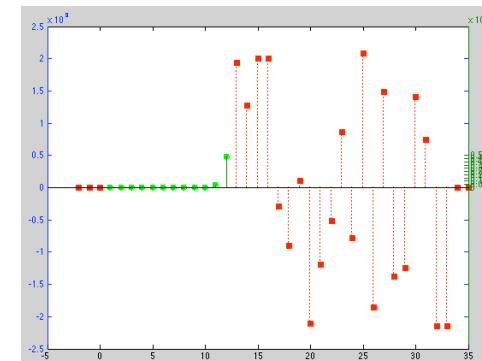
- Les ordinateurs utilisent une **arithmétique entière modulaire** sur n bits (où $n = 16, 32, 64$, etc)
- Exemple d'une **représentation des entiers sur 4 bits** (en **complément à deux**) :



- Seuls les entiers entre **-8 et 7** sont représentés sur 4 bits
- On obtient **$7 + 2 = -7$**
 $7 + 9 = 0$

Le bug est une défaillance du programmeur

En machine, la fonction `fact(n)` ne coïncide avec $n! = 2 \times 3 \times \dots \times n$ sur les entiers que pour $1 \leq n \leq 12$:



Et en OCAML on a un résultat différent !

```
let rec fact n = if (n = 1) then 1 else n * fact(n-1);;
```

fact(n)	C	OCAML	fact(22)	-522715136	-522715136
fact(1)	1	1	fact(23)	862453760	862453760
...	fact(24)	-775946240	-775946240
fact(12)	479001600	479001600	fact(25)	2076180480	-71303168
fact(13)	1932053504	-215430144	fact(26)	-1853882368	293601280
fact(14)	1278945280	-868538368	fact(27)	1484783616	-662700032
fact(15)	2004310016	-143173632	fact(28)	-1375731712	771751936
fact(16)	2004189184	-143294464	fact(29)	-1241513984	905969664
fact(17)	-288522240	-288522240	fact(30)	1409286144	-738197504
fact(18)	-898433024	-898433024	fact(31)	738197504	738197504
fact(19)	109641728	109641728	fact(32)	-2147483648	0
fact(20)	-2102132736	45350912	fact(33)	-2147483648	0
fact(21)	-1195114496	952369152	fact(34)	0	0

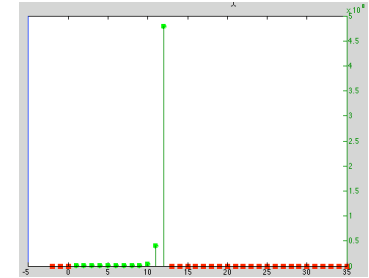
Pourquoi ? Que fait fact(-1) ?

Preuve d'absence d'erreurs à l'exécution par analyse statique

```
% cat -n fact_lim.c
1 int MAXINT = 2147483647;
2 int fact (int n) {
3   int r, i;
4   if (n < 1) || (n = MAXINT) {
5     r = 0;
6   } else {
7     r = 1;
8     for (i = 2; i <= n; i++) {
9       if (r <= (MAXINT / i)) {
10        r = r * i;
11      } else {
12        r = 0;
13      }
14    }
15  }
16  return r;
17 }
18
```

19 int main() {
20 int n, f;
21 f = fact(n);
22 }

% astree -exec-fn main fact_lim.c |& grep WARN
%
→ Aucune alarme!



Exemples classiques de bugs du calcul en flottants

Les modèles et leur réalisation sur machine

- Les **modélisations mathématiques** des systèmes physiques utilisent les **nombre réels**
- Les **langages informatiques de modélisation** (comme SCAD⁽²⁾) utilisent les **nombre réels**
- Les **nombre réels** sont difficilement représentables en machine (π a un nombre infini de décimales)
- Les **langages informatiques de programmation** (comme C ou OCAML) utilisent les **nombre flottants**

(2) Voir la leçon du 15 février 2008

Les flottants

- Les *nombres flottants* sont un sous-ensemble des *rationnels*
- Par exemple on peut représenter **32 flottants sur 6 bits**, les 16 flottants positifs étant répartis comme suit :



- Quand les calculs réels ne tombent pas juste, il faut **arrondir vers un flottant proche**

Exemple d'erreur d'arrondi (1)

$$(x + a) - (x - a) \neq 2a$$

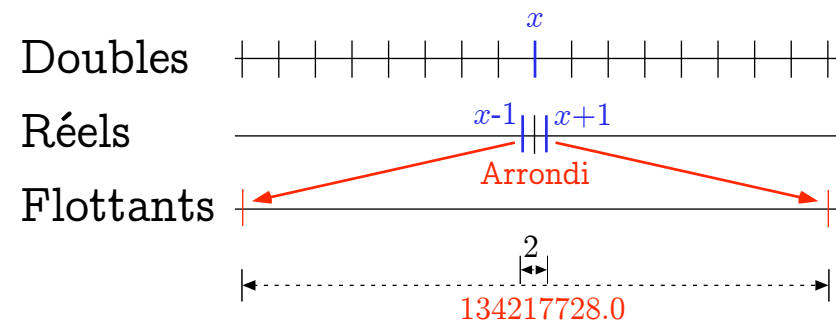
```
#include <stdio.h>           % gcc arrondi1.c -o arrondi1.exec
int main() {                 % ./arrondi1.exec
    double x, a; float y, z; 134217728.000000
    x = 1125899973951488.0; %
    a = 1.0;
    y = (x+a);
    z = (x-a);
    printf("%f\n", y-z);
}
```

Exemple d'erreur d'arrondi (2)

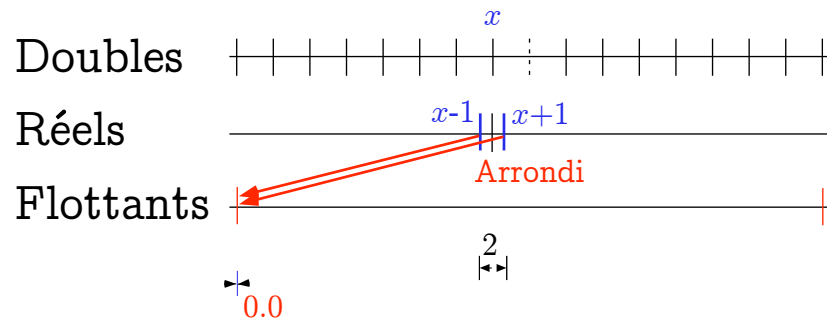
$$(x + a) - (x - a) \neq 2a$$

```
#include <stdio.h>           % gcc arrondi2.c -o arrondi2.exec
int main() {                 % ./arrondi2.exec
    double x, a; float y, z; 0.000000
    x = 1125899973951487.0; %
    a = 1.0;
    y = (x+a);
    z = (x-a);
    printf("%f\n", y-z);
}
```

À la chasse au bug (1)



À la chasse au bug (2)

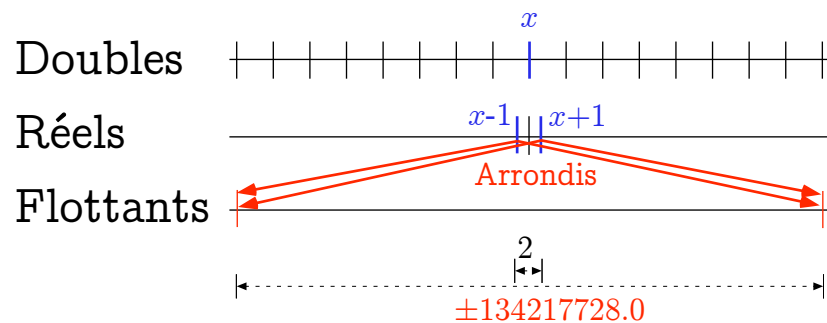


Preuve d'absence d'erreurs à l'exécution par analyse statique

```
% cat -n arrondi3.c
1 int main() {
2     double x; float y, z, r;;
3     x = 1125899973951488.0;
4     y = x + 1;
5     z = x - 1;
6     r = y - z;
7     __ASTREE_log_vars((r));
8 }
% astree -exec-fn main -print-float-digits 10 arrondi3.c \
|& grep "r in "
direct = <float-interval : r in [-134217728, 134217728] >(3)
```

⁽³⁾ ASTRÉE considère le pire des cas d'arrondi (vers $+\infty$, $-\infty$, 0 ou au plus proche) d'où la possibilité d'obtenir -134217728.

Vérification faite dans le pire des cas



Exemples de bugs dus à des erreurs d'arrondi

- Le **bug du missile patriote** ratant les Scuds en 1991 à cause une horloge incrémentée par $\frac{1}{10}$ ème de seconde ((0, 1)₁₀ = (0, 0001100110011001100...)₂ en binaire)
- Le **bug d'Exel 2007** : $77,1 \times 850$ qui donne 65.535 mais s'affiche en 100.000!⁽⁴⁾

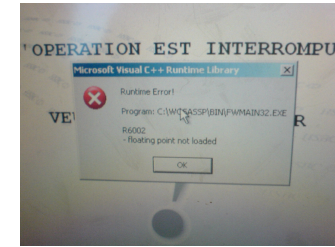
2	65535-2 [^] (-37)	100000	65536-2 [^] (-37)	100001
3	65535-2 [^] (-36)	100000	65536-2 [^] (-36)	100001
4	65535-2 [^] (-35)	100000	65536-2 [^] (-35)	100001
5	65535-2 [^] (-34)	65535	65536-2 [^] (-34)	65536
6	65535-2 [^] (-36)-2 [^] (-37)	100000	65536-2 [^] (-36)-2 [^] (-37)	100001
7	65535-2 [^] (-35)-2 [^] (-37)	100000	65536-2 [^] (-35)-2 [^] (-37)	100001
8	65535-2 [^] (-35)-2 [^] (-36)	100000	65536-2 [^] (-35)-2 [^] (-36)	100001
9	65535-2 [^] (-35)-2 [^] (-36)-2 [^] (-37)	65535	65536-2 [^] (-35)-2 [^] (-36)-2 [^] (-37)	65536

⁽⁴⁾ Erreur d'arrondi incorrect lors de la traduction de flottants IEEE 754 sur 64 bits en chaîne de caractères Unicode qui conduit à un mauvais alignement dans une table de conversion. Le bug apparaît exactement pour six nombres entre 65534.99999999995 et 65535 et six entre 65535.99999999995 et 65536.

Les bugs dans le monde numérisé quotidien

Les bugs sont fréquents dans la vie quotidienne

- Les **bugs** se trouvent dans les banques, les voitures, les téléphones, les machines à laver, . . .
- Exemple (**bug dans un distributeur de monnaie** au 19 Boulevard Sébastopol à Paris, le 21 novembre 2006 à 8^h30) :



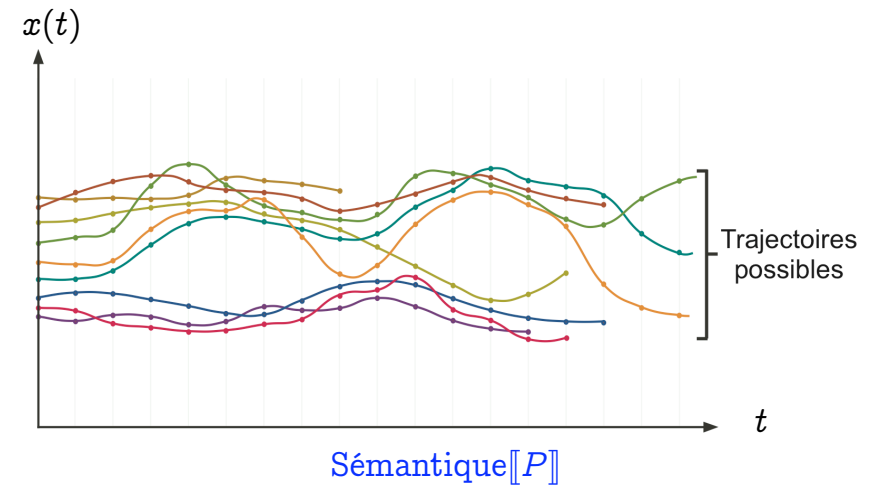
2. La vérification des programmes

Principe de la vérification des programmes

- Définir une **sémantique** du langage (c'est-à-dire l'effet de l'exécution des programmes du langage)
- Définir une **spécification** (exemple : pas d'erreur à l'exécution comme une division par zéro, un débordement arithmétique, etc)
- Faire une **preuve formelle** que la sémantique satisfait la spécification
- Utiliser l'ordinateur pour **automatiser la preuve**

Sémantique des programmes

Sémantique opérationnelle du programme P



Exemple : trace d'exécution de `fact(4)` ⁽⁵⁾

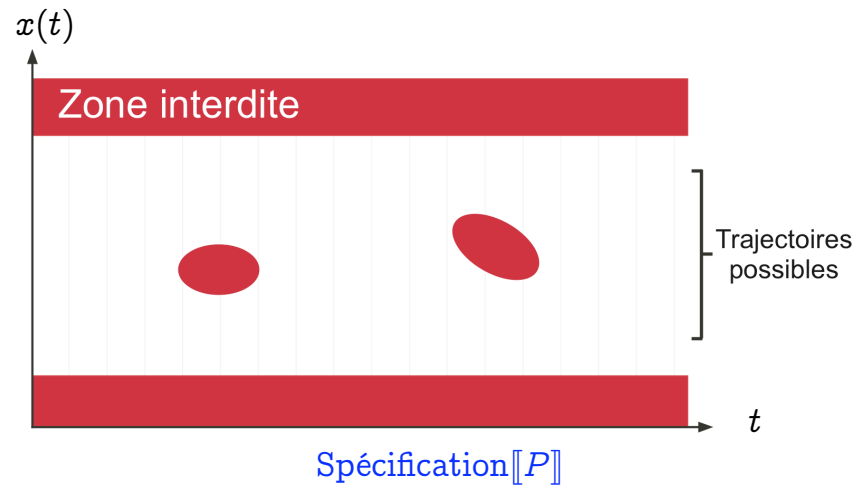
```
int fact (int n ) {  
  int r = 1, i;  
  for (i=2; i<=n; i++) {  
    r = r*i;  
  }  
  return r;  
}
```

• $n \leftarrow 4; r \leftarrow 1;$
• $i \leftarrow 2; r \leftarrow 1 \times 2 = 2;$
• $i \leftarrow 3; r \leftarrow 2 \times 3 = 6;$
• $i \leftarrow 4; r \leftarrow 6 \times 4 = 24;$
• $i \leftarrow 5;$
• $\text{return } 24;$

⁽⁵⁾ Voir la leçon du 22 février 2008

Spécification des programmes

Spécification du programme P



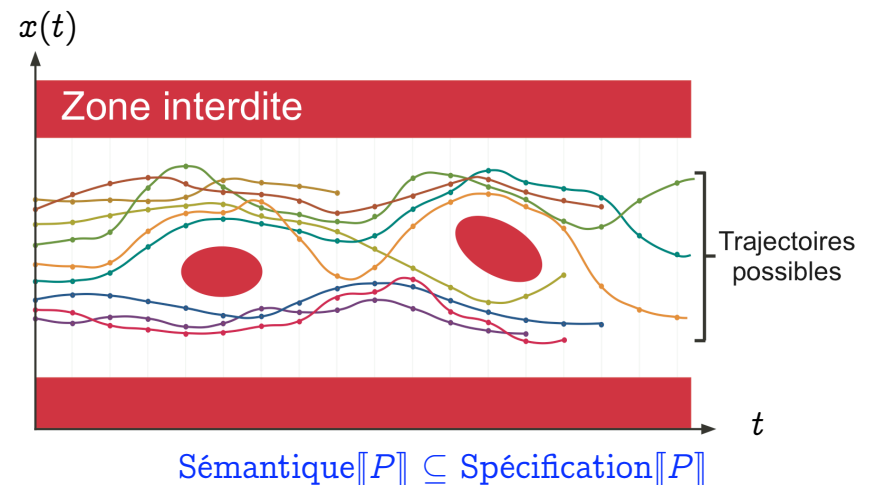
Exemple de spécification

```
int fact (int n ) {  
  int r, i;  
  r = 1;  
  for (i=2; i<=n; i++) {  
    r = r*i;  
  }  
  return r;  
}
```

← pas de débordement de $i++$
← pas de débordement de $r*i$

Preuve formelle

Preuve formelle du programme P

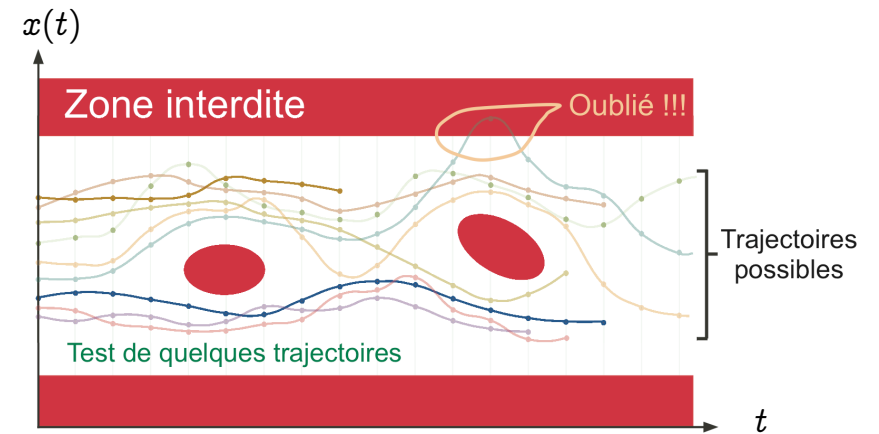


Indécidabilité et complexité

- Le problème de la preuve mathématique formelle est **indécidable**⁽⁶⁾
- Même en supposant tout fini, la **complexité** est beaucoup trop élevée
- Exemple : 1.000.000 lignes \times 50.000 variables \times 64 bits $\simeq 10^{27}$ états
- À raison de l'examen de 10^{15} états par seconde, il faudrait 10^{12} s $>$ 300 siècles (et beaucoup de mémoire)!

(6) un ordinateur ne peut pas toujours le résoudre en un temps fini, voir la leçon du 22 février 2008

Le test est incomplet

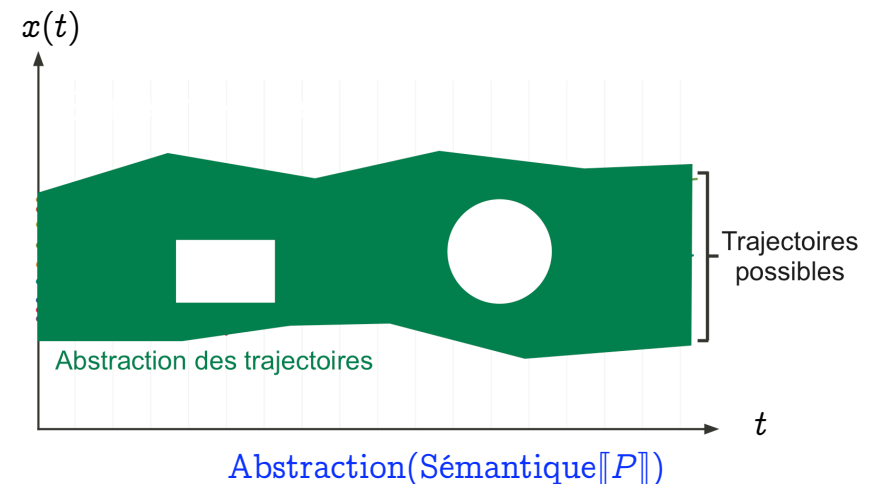


3. Interprétation abstraite [1]

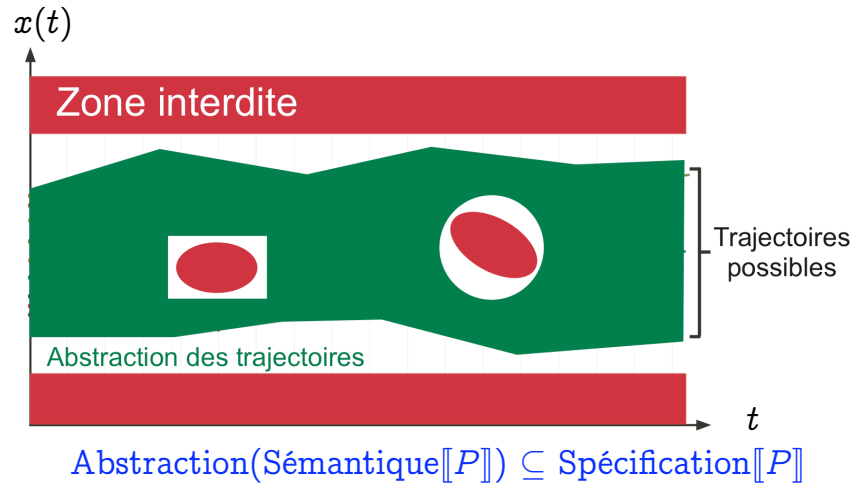
Référence

- [1] P. Cousot. Méthodes itératives de construction et d'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur un treillis, analyse sémantique de programmes. Thèse d'Etat ès sciences mathématiques. Université scientifique et médicale de Grenoble. 1978.

Abstraction du programme P

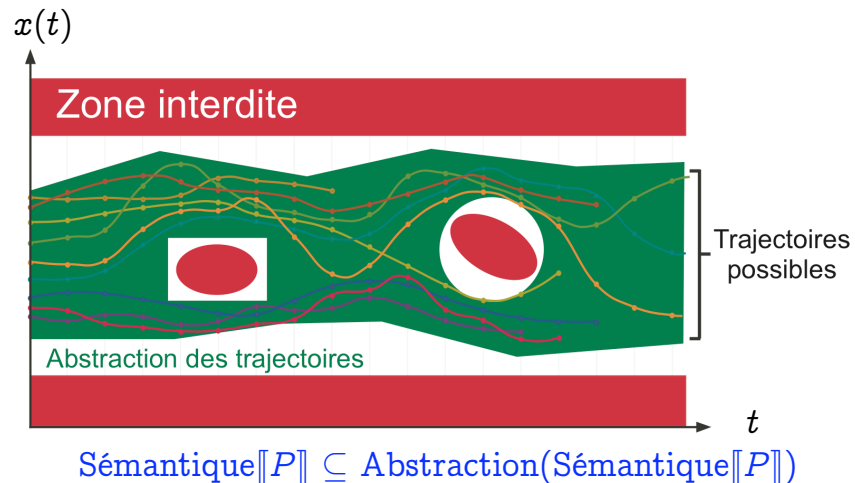


Preuve par abstraction

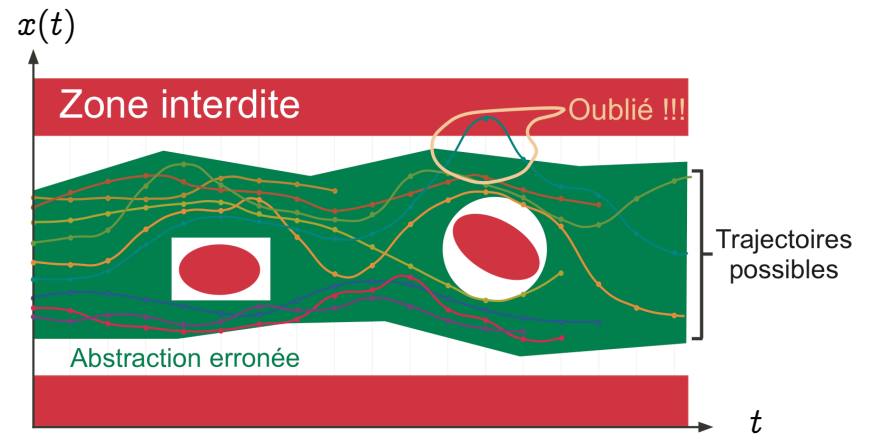


Correction de l'interprétation abstraite

L'interprétation abstraite est correcte



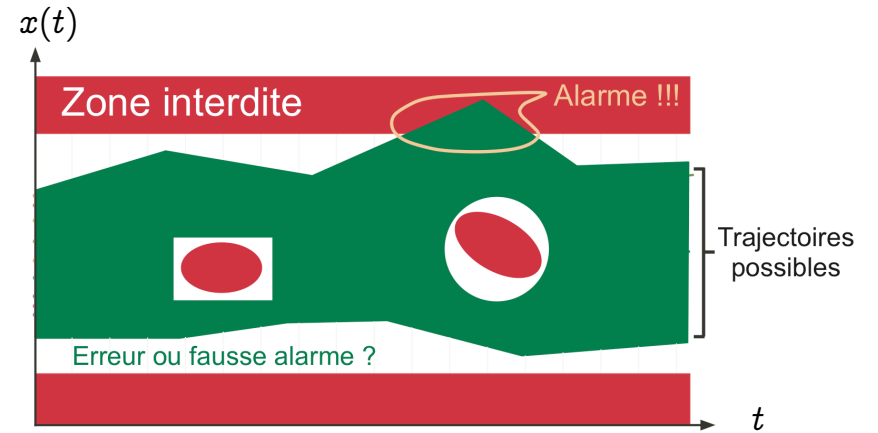
Exemple d'abstraction erronée ⁽⁷⁾



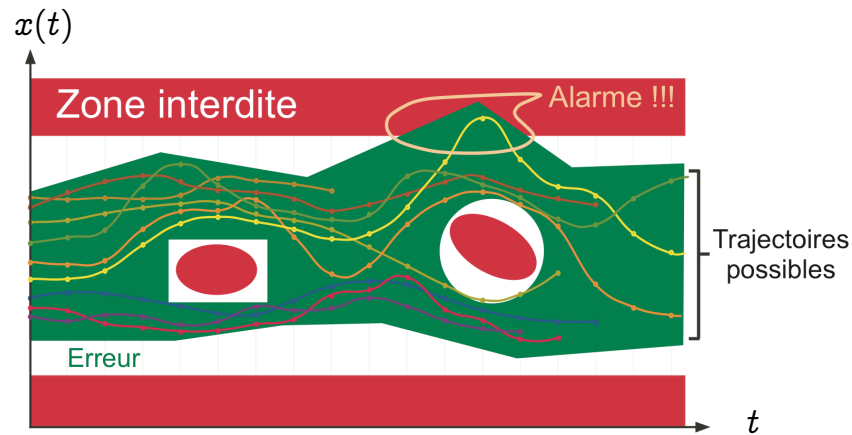
(7) Cette situation est toujours exclue par la théorie de l'interprétation abstraite.

Incomplétude de l'interprétation abstraite

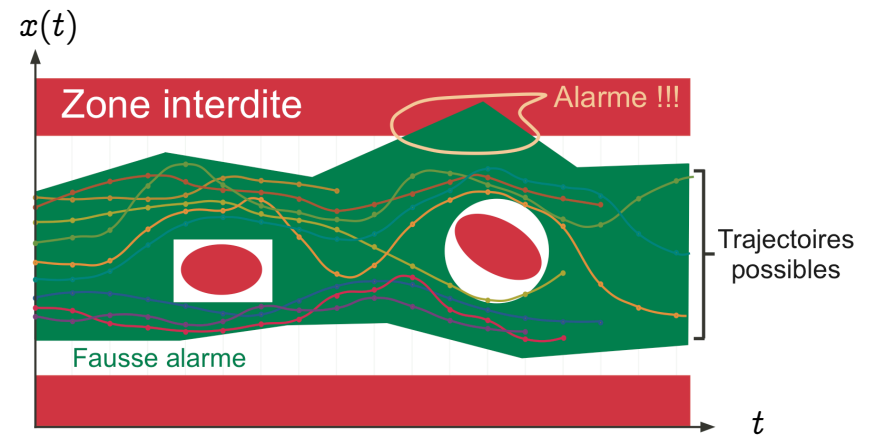
Alarme



Une alarme peut correspondre à une erreur



Une alarme peut correspondre à une approximation



Applications de l'interprétation abstraite vues dans le cours

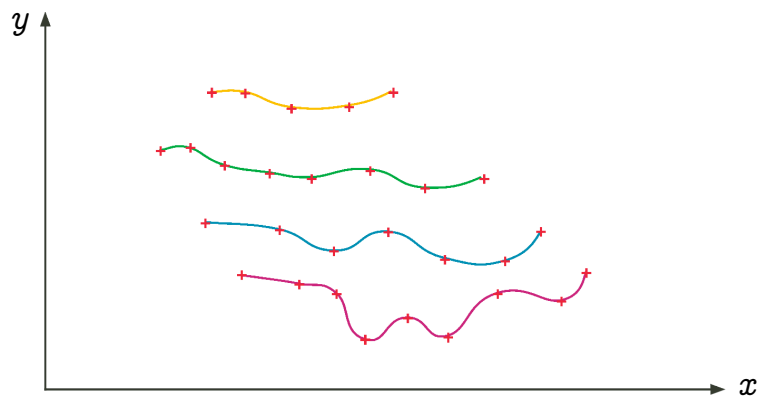
- Le **typage** ⁽⁸⁾ [Cou97]
- Le **“model-checking”** ⁽⁹⁾ [CC00]
- La **transformation des programmes** (par exemple pour l'optimisation ⁽⁸⁾ lors de la compilation) [CC02]
- La définition de **sémantiques** à différents niveaux d'abstraction [Cou02]
- L'**analyse statique** pour vérifier l'absence de bugs [BCC⁺03]
- ...

⁽⁸⁾ Voir la leçon du 8 février 2008 et le séminaire de Xavier Leroy

⁽⁹⁾ Voir la leçon du 22 février 2008

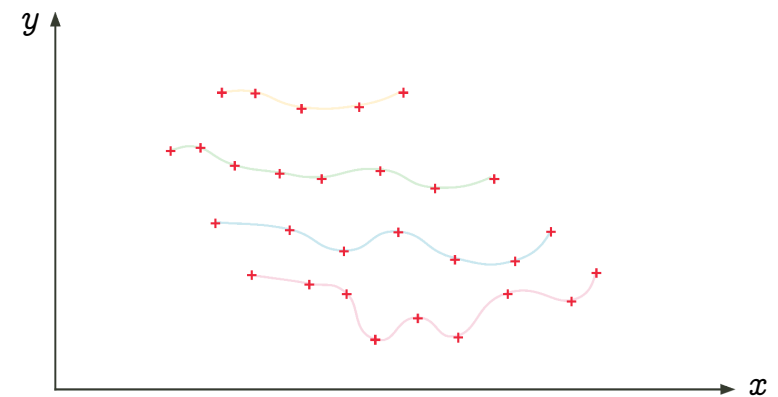
4. Application de l'interprétation abstraite à l'analyse statique

Sémantique



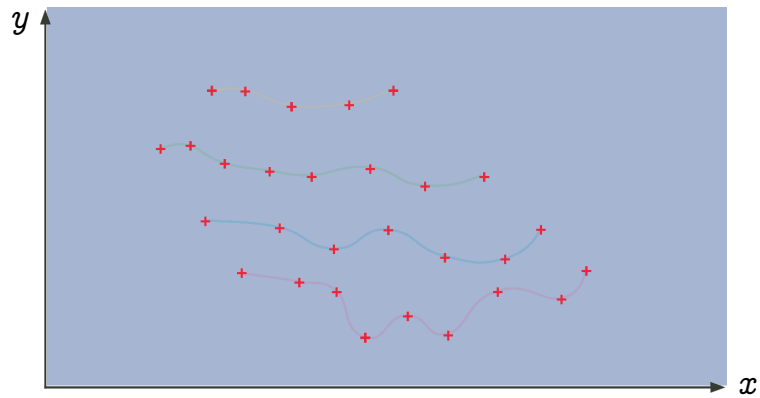
Ensemble (infini) de traces (finies ou infinies)

Abstraction en un ensemble d'états (invariant)



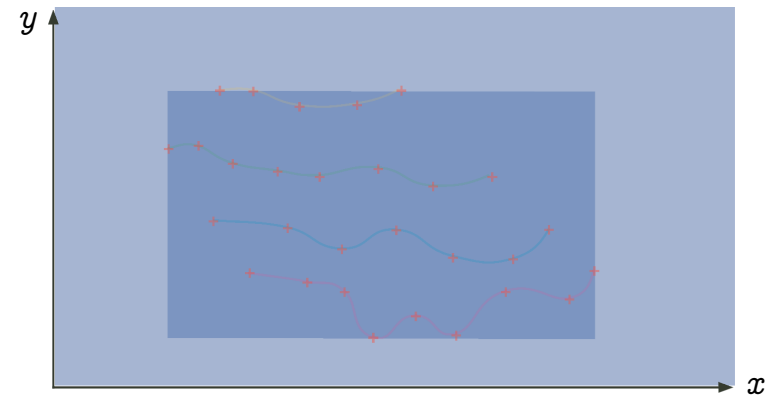
Ensemble de points $\{(x_i, y_i) : i \in \Delta\}$, Hoare logic [Cou02]

Abstraction par des signes



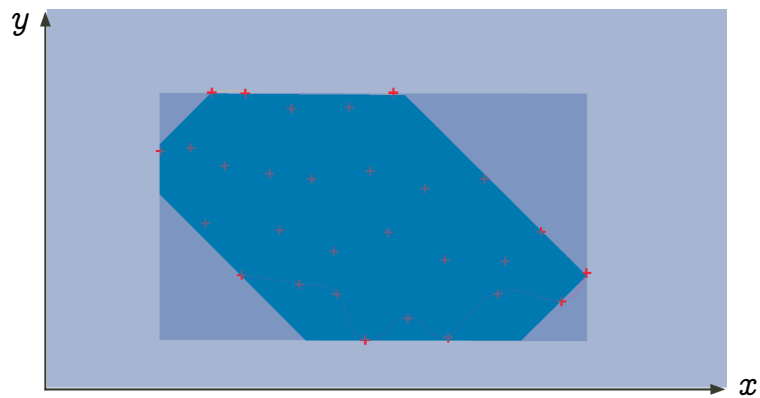
Signes $x \geq 0, y \geq 0$ [CC79]

Abstraction par des intervalles



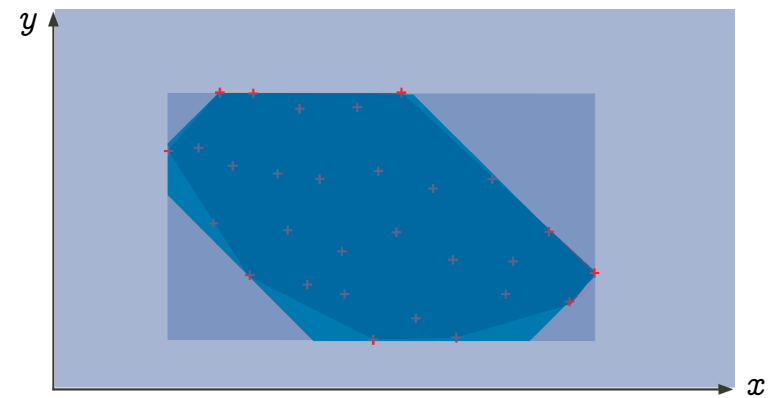
Intervalles $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ [CC77]

Abstraction par des octogones



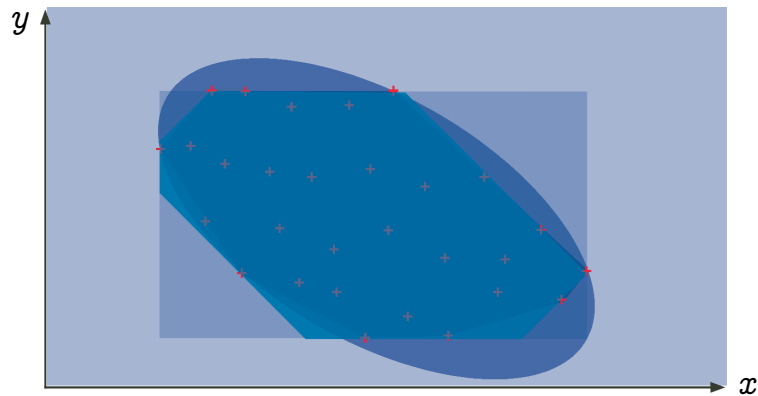
Octogones $x - y \leq a, x + y \leq b$ [Min06]

Abstraction par des polyèdres



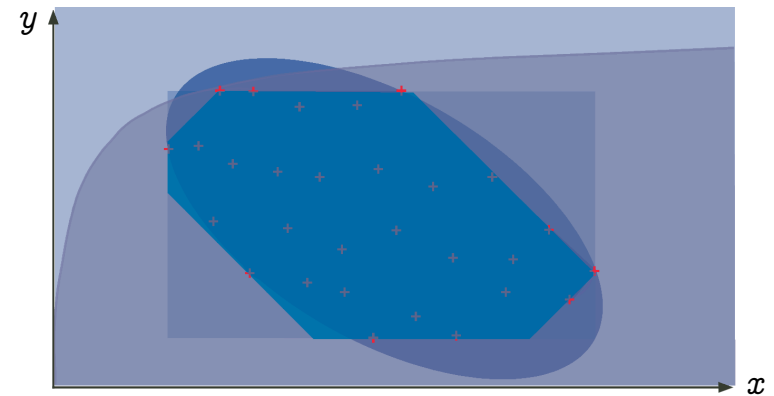
Polyèdres $a.x + b.y \leq c$ [CH78]

Abstraction par des ellipsoïdes



Ellipsoïdes $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq c$ [Fer05b]

Abstraction par des exponentielles



Exponentielles $a^x \leq y$ [Fer05a]

5. Calcul d'invariant par approximation de points fixes [CC77]

Équation de point fixe

```

{y ≥ 0} ← hypothèse
x = y
{I(x, y)} ← invariant de boucle
while (x > 0) {
  x = x - 1;
}
    
```

Conditions de vérification de Floyd-Hoare :

$$(y \geq 0 \wedge x = y) \implies I(x, y) \quad \text{initialisation}$$

$$(I(x, y) \wedge x > 0 \wedge x' = x - 1) \implies I(x', y) \quad \text{iteration}$$

Équation de point fixe :

$$I(x, y) = x \geq 0 \wedge (x = y \vee I(x + 1, y)) \quad (\text{i.e. } I = F(I)^{(10)})$$

⁽¹⁰⁾ On cherche l'invariant I le plus précis, qui implique tous les autres

Itérés $I = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\text{faux}) \dots$ accélérés

$$I^0(x, y) = \text{faux}$$

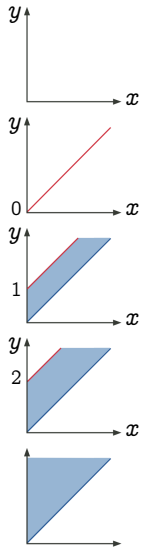
$$I^1(x, y) = x \geq 0 \wedge (x = y \vee I^0(x + 1, y)) \\ = 0 \leq x = y$$

$$I^2(x, y) = x \geq 0 \wedge (x = y \vee I^1(x + 1, y)) \\ = 0 \leq x \leq y \leq x + 1$$

$$I^3(x, y) = x \geq 0 \wedge (x = y \vee I^2(x + 1, y)) \\ = 0 \leq x \leq y \leq x + 2$$

$$I^4(x, y) = I^2(x, y) \nabla I^3(x, y) \leftarrow \text{widening} \\ = 0 \leq x \leq y$$

$$I^5(x, y) = x \geq 0 \wedge (x = y \vee I^4(x + 1, y)) \\ = I^4(x, y) \text{ point fixe!}$$



6. Application industrielle de l'interprétation abstraite

Exemples d'analyseurs statiques

– Pour les programmes C critiques synchrones embarqués de contrôle/commande (par exemple pour des logiciels de Commande De Vol Électrique⁽¹¹⁾)

– aiT [FHL⁺01] est un analyseur statique qui vérifie les temps d'exécution maximaux (pour garantir la synchronisation en temps voulu)



– ASTRÉE [BCC⁺03] est un analyseur statique qui vérifie l'absence d'erreurs à l'exécution



⁽¹¹⁾ Voir la leçon du 15 février 2008 et le séminaire de Gérard Ladiet

Exemple d'analyse par ASTRÉE

```
typedef enum {FALSE = 0, TRUE = 1} BOOLEAN;
BOOLEAN INIT; float P, X;
void filter () {
    static float E[2], S[2];
    if (INIT) { S[0] = X; P = X; E[0] = X; }
    else { P = (((((0.5 * X) - (E[0] * 0.7)) + (E[1] * 0.4))
                + (S[0] * 1.5)) - (S[1] * 0.7)); }
    E[1] = E[0]; E[0] = X; S[1] = S[0]; S[0] = P;
    /* S[0], S[1] in [-1327.02698354, 1327.02698354] */
}
void main () { X = 0.2 * X + 5; INIT = TRUE;
    while (1) {
        X = 0.9 * X + 35; /* simulated filter input */
        filter (); INIT = FALSE; }
}
```

Exemple d'analyse par ASTRÉE

```
% cat retro.c
typedef enum {FALSE=0, TRUE=1} BOOL;
BOOL FIRST;
volatile BOOL SWITCH;
volatile float E;
float P, X, A, B;

void dev( )
{ X=E;
  if (FIRST) { P = X; }
  else
    { P = (P - (((2.0 * P) - A) - B)
      * 4.491048e-03)); };
  B = A;
  if (SWITCH) {A = P;}
  else {A = X;}
}

void main()
{ FIRST = TRUE;
  while (TRUE) {
    dev( );
    FIRST = FALSE;
    __ASTREE_wait_for_clock();
  }
}

% cat retro.config
__ASTREE_volatile_input((E [-15.0, 15.0]));
__ASTREE_volatile_input((SWITCH [0,1]));
__ASTREE_max_clock((3600000));
|P| <= (15. + 5.87747175411e-39
/ 1.19209290217e-07) * (1 +
1.19209290217e-07)^clock -
5.87747175411e-39 / 1.19209290217e-07
<= 23.0393526881
```

Résultats industriels obtenus avec ASTRÉE

Preuves automatiques d'absence
d'erreur à l'exécution dans des
logiciels de Commande De Vol
Électrique⁽¹²⁾ :



- Logiciel 1 : 132.000 lignes de C, 40mn sur un PC 2.8 GHz, 300 mégaoctets (nov. 2003)
- Logiciel 2 : 1.000.000 de lignes de C, 34h, 8 gigaoctets (nov. 2005)

sans aucune fausse alarme

Premières mondiales !

(12) Voir la leçon du 15 février 2008 et le séminaire de Gérard Ladiet

7. Conclusion

Conclusion

- **Vision** : pour comprendre le monde numérique, il faut l'analyser à différents **niveaux d'abstraction**
- **Théorie** : l'**interprétation abstraite** assure une cohérence entre ces abstractions et offre des techniques d'approximation effectives
- **Applications** : le choix d'abstractions effectives suffisamment grossières pour être *calculables* et précises pour *éviter les fausses alarmes* permet de **vaincre l'indécidabilité et la complexité** dans la **vérification des modèles et des programmes**

Le futur

- **Génie informatique** : La vérification manuelle par **contrôle de la méthode de conception du programme**⁽¹³⁾ sera complétée par la **vérification automatique du programme produit**
- **Systèmes complexes** : l'interprétation abstraite s'applique aussi bien à l'**analyse des systèmes évolutifs** dont on sait décrire le comportement discret (traitement d'images, systèmes biologiques, calcul quantique, etc)

(13) Voir le séminaire de Gérard Ladier du 15 février 2008

FIN

Merci de votre attention

8. Bibliographie

Courte bibliographie

- [BCC⁺03] B. Blanchet, P. Cousot, R. Cousot, J. Feret, L. Mauborgne, A. Miné, D. Monniaux, and X. Rival. A static analyzer for large safety-critical software. In *Proceedings of the ACM SIGPLAN '2003 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI)*, pages 196–207, San Diego, California, USA, 7–14 juin 2003. ACM Press, New York, New York, USA.
- [CC77] P. Cousot and R. Cousot. Abstract interpretation : a unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints. In *Conference Record of the Fourth Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 238–252, Los Angeles, California, 1977. ACM Press, New York, New York, USA.
- [CC79] P. Cousot and R. Cousot. Systematic design of program analysis frameworks. In *Conference Record of the Sixth Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 269–282, San Antonio, Texas, 1979. ACM Press, New York, New York, USA.
- [CC00] P. Cousot and R. Cousot. Temporal abstract interpretation. In *Conference Record of the Twentyseventh Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 12–25, Boston, Massachusetts, USA, janvier 2000. ACM Press, New York, New York, USA.
- [CC02] P. Cousot and R. Cousot. Systematic design of program transformation frameworks by abstract interpretation. In *Conference Record of the Twentieth Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 178–190, Portland, Oregon, USA, janvier 2002. ACM Press, New York, New York, USA.

- [CCF⁺07] P. Cousot, R. Cousot, J. Feret, L. Mauborgne, A. Miné, D. Monniaux, and X. Rival. Varieties of static analyzers : A comparison with ASTRÉE, papier invité. In M. Hinchey, He Jifeng, and J. Sanders, editors, *Proceedings of the First IEEE & IFIP International Symposium on Theoretical Aspects of Software Engineering, TASE '07*, pages 3–17, Shanghai, Chine, 6–8 juin 2007. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, Californie, USA.
- [CH78] P. Cousot and N. Halbwachs. Automatic discovery of linear restraints among variables of a program. In *Conference Record of the Fifth Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 84–97, Tucson, Arizona, 1978. ACM Press, New York, New York, USA.
- [Cou97] P. Cousot. Types as abstract interpretations, papier invité. In *Conference Record of the Twenty-fourth Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, pages 316–331, Paris, janvier 1997. ACM Press, New York, New York, USA.
- [Cou02] P. Cousot. Constructive design of a hierarchy of semantics of a transition system by abstract interpretation. *Theoretical Computer Science*, 277(1–2) :47–103, 2002.
- [DS07] D. Delmas and J. Souyris. ASTRÉE : from research to industry. In G. Filé and H. Riis-Nielson, editors, *Proceedings of the Fourteenth International Symposium on Static Analysis, SAS '07*, Kongens Lyngby, Danemark, Lecture Notes in Computer Science 4634, pages 437–451. Springer, Berlin, Allemagne, 22–24 août 2007.
- [Fer05a] J. Feret. The arithmetic-geometric progression abstract domain. In R. Cousot, editor, *Proceedings of the Sixth International Conference on Verification, Model Checking and Abstract Interpretation (VMCAI 2005)*, pages 42–58, Paris, 17–19 janvier 2005. Lecture Notes in Computer Science 3385, Springer, Berlin, Allemagne.

- [Fer05b] J. Feret. Numerical abstract domains for digital filters. In *First International Workshop on Numerical & Symbolic Abstract Domains, NSAD '05*, Maison Des Polytechniciens, Paris, 21 janvier 2005.
- [FHL⁺01] C. Ferdinand, R. Heckmann, M. Langenbach, F. Martin, M. Schmidt, H. Theiling, S. Thesing, and R. Wilhelm. Reliable and precise WCEt determination for a real-life processor. In T.A. Henzinger and C.M. Kirsch, editors, *Proceedings of the First International Workshop on Embedded Software, EMSOFT '2001*, volume 2211 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 469–485. Springer, Berlin, Allemagne, 2001.
- [Min06] A. Miné. The octagon abstract domain. *Higher-Order and Symbolic Computation*, 19 :31–100, 2006.

Réponses aux questions

- Les entiers sont codés sur 32 bits en C et 31 bits en OCAML (un bit étant gardé pour gérer la mémoire pour le ramassage de miettes (*garbage collection*))
- L'appel de `fact(-1)` appelle `fact(-2)` qui appelle `fact(-3)`, etc. À chaque appel, il faut empiler la paramètre et l'adresse de retour⁽¹⁴⁾, ce qui se termine par un débordement de la pile :

```
% ocaml
Objective Caml version 3.10.0
# let rec fact n = if (n = 1) then 1 else n * fact(n-1);;
val fact : int -> int = <fun>
# fact(-1);;
Stack overflow during evaluation (looping recursion?).
```

⁽¹⁴⁾ Voir la leçon du 8 février 2008 et le séminaire de Xavier Leroy